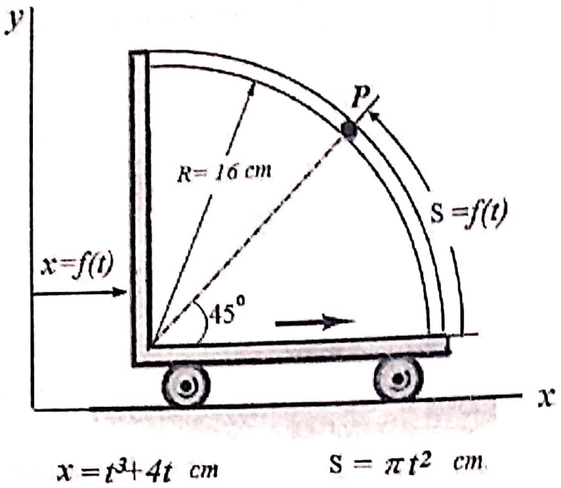
يبين الشكل المجاور جُسيماً P يتحرك حركة خطية منحنية باتجاه الأعلى ، وذلك بالنسبة إلى عربة تتحرك نحو اليمين حركة انسحابية . أوجد سرعة وتسارع هذا الجسيم بعد مرور ثانيتين على بدء الحركة ، إذا علمت أن الجسيم يتحرك تبعاً للقانون: $S=\pi t^2$. وأن العربة تتحرك تبعاً للقانون: $x=t^3+4t$. حيث يقدر الزمن بوحدة الثانية والموضع بالسنتيمتر.



الحل : ....

سرعة الجسيم P : بما أن حركة الجسيم P هي حركة مركبة ، إذن تتحدد سرعته الكلية بالجمع الشعاعي لسرعته النسبية المنحنية مع سرعته المكتسبة الانسحابية وذلك كما يلي:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_d$$

حيث :

$$v_r = \frac{ds}{dt} = 2\pi t = 2\pi \times 2 = 12.6\ cm/s$$

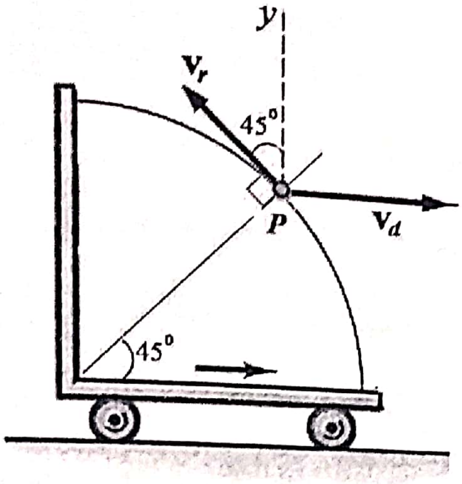
$$v_d = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 4 = 3 \times 2^2 + 4 = 16\ cm/s$$

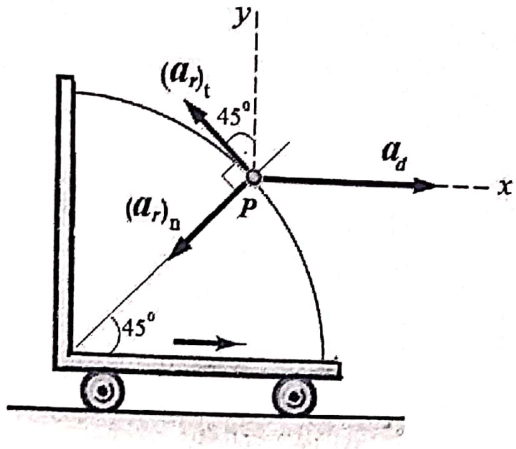
نرسم بيانيا هاتين السرعتين كما هو مبين في الشكل ، ثم نقوم بإسقاط العلاقة الشعاعية للسرعة على المحورين (x,y) فنحصل على السرعة المطلوبة كما يلي :

$$v_x = -v_r \cos 45° + v_d = 7.1\ \ cm/s$$

$$v_y = v_r \cos 45° = 8.9 \ cm/s$$

$$v_P = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = 11.39 \ cm/s$$





تسارع الجسيم P : بما أن حركة العربة انسحابية ، إذن التسارع المتمم يكون معدوماً وتصبح معادلة التسارع على النحو الآتي:

$$\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_d$$

$$\boldsymbol{a}_p = (\boldsymbol{a}_r)_t + (\boldsymbol{a}_r)_n + \boldsymbol{a}_d$$

نرسم أشعة هذه التسارعات كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب القيم الآتية :

$$(a_r)_t = \frac{dv_r}{dt} = 2\pi = 6.3 \ cm/s^2$$

$$(a_r)_n = \frac{v_r^2}{R} = \frac{(12.6)^2}{16} = 9.92 \ cm/s^2$$

$$a_d = \frac{dv_d}{dt} = 6t = 6 \times 2 = 12 \ cm/s^2$$

نقوم بإسقاط العلاقة الشعاعية للتسارعات على المحورين (x,y) فينتج لدينا :

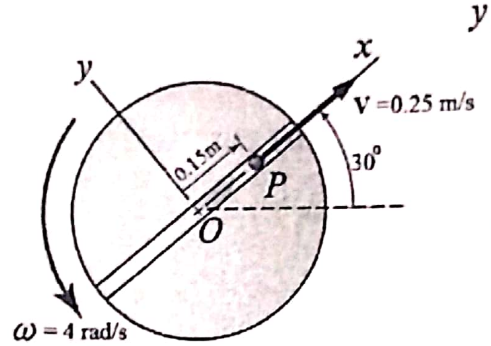
$$a_x = 12 - (6.3 - 9.92) \cos 45° = 0.53 \ cm/s^2$$

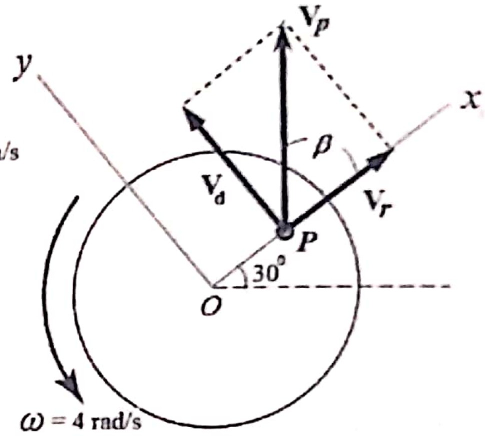
$$a_y = 6.3 \sin 45° - 9.9 \sin 45° = -2.56 \ cm/s^2$$

$$a_P = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = 2.61 \ cm/s^2$$

مثال رقم (20)

يتحرك الجسيم P داخل مجرى محفور في قرص دائري بسرعة خطية مستقيمة قدرها 0.25m/s كما هو مبين في الشكل. إذا كان هذا القرص يدور بعكس دوران عقارب الساعة وبسرعة بزاوية تساوي 4rad/s، فأوجد عندئذ السرعة المطلقة للجسيم P في الوضع المبين في الشكل.





الحل : ....

بما أن حركة الجسيم P هي حركة مركبة ، إذن تتحدد سرعته الكلية بالجمع الشعاعي لسرعته النسبية المستقيمة مع سرعته المكتسبة الدورانية وذلك كما يلي :

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_d$$

حيث :

$$v_r = 0.25\ m/s$$

$$v_d = r\omega = 0.15 \times 4 = 0.6\ m/s$$

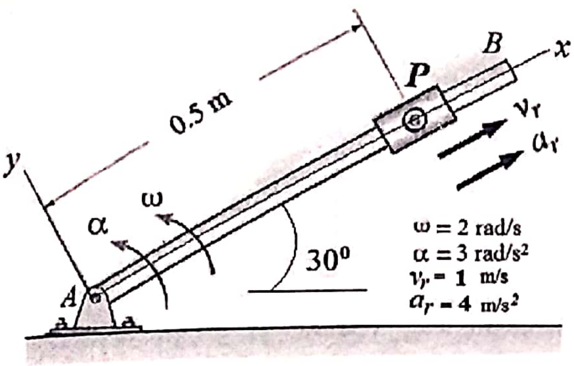
إن اتجاه السرعة المكتسبة عمودي على الخط OP وجهتها يجب أن توافق اتجاه السرعة الزاوية للقرص . يبين الشكل التمثيل البياني للسرعات المذكورة ، وبناء على ذلك نجد :

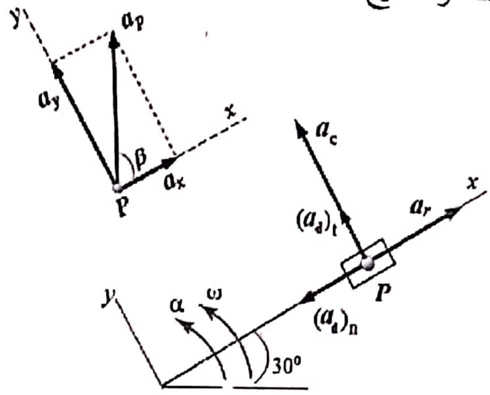
$$v_P = \sqrt{{v_r}^2 + {v_d}^2} = \sqrt{0.25^2 + 0.6^2} = 0.65\ m/s$$

$$\tan\beta = \frac{v_d}{v_r} = 2.4 \quad \Rightarrow \quad \beta = 67.4^\circ$$

مثال رقم (21)

يدور الذراع AB بعكس دوران عقارب الساعة. وتتحرك الحلقة **P** على امتداد هذا الذراع اعتباراً من النقطة A حيث قطعت مسافة مقدارها $x = 0.5\ m$ بسرعة 1.5 m/s وتسارع $4\ m/s^2$ كما هو مبين في الشكل .أوجد تسارع الحلقة **P** .





الحل : ....

بما أن حركة الحلقة P هي حركة مركبة ، إذن يتحدد تسارعها الكلي بالجمع الشعاعي للتسارعات الآتية : النسبي $\boldsymbol{a}_r$ والمكتسب $\boldsymbol{a}_d$ (المماسي والناظمي) والمتمِّم $\boldsymbol{a}_c$:

$$\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_r + (\boldsymbol{a}_d)_t + (\boldsymbol{a}_d)_n + \boldsymbol{a}_c$$

نحسب القيم الآتية :

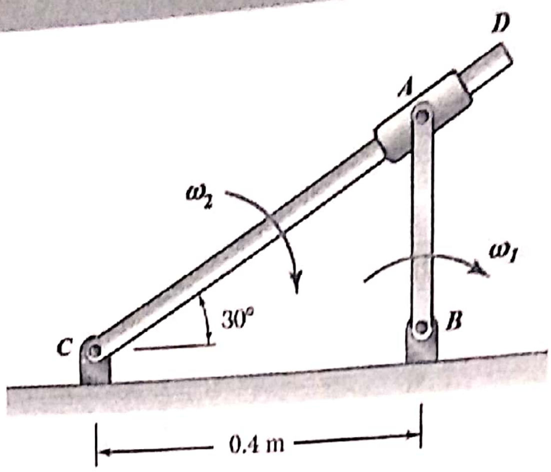
$$(a_d)_t = r\alpha = 0.5 \times 3 = 1.5\, m/s^2$$
$$(a_d)_n = r\omega^2 = 0.5 \times (2)^2 = 2\, m/s^2$$
$$a_c = 2\omega v_r = 2 \times 2 \times 1 = 4\, m/s^2$$

نرسم أشعة هذه التسارعات كما هو مبين في الشكل ، ثم نقوم بإسقاط العلاقة الشعاعية للتسارعات على المحورين (x,y) فنحصل بعد التعويض على التسارع المطلوب:

$$a_x = 4 - 2 = 2\ \ m/s^2$$
$$a_y = 4 + 1.5 = 5.5\ \ m/s^2$$
$$a_P = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{2^2 + 5.5^2} = 5.85\, m/s^2$$
$$\tan\beta = \frac{a_y}{a_x} = 2.75 \qquad \Rightarrow \qquad \beta = 70^\circ$$

مثال رقم (22)

يدور الذراع AB في اتجاه دوران عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة مقدارها $\omega_1 = 6\ rad/s$ مما يؤدي إلى تدوير الذراع CD من خلال الحلقة المنزلقة A . إذا علمت أن الحلقة مثبتة تثبيتاً مفصلياً بالذراع AB فأوجد ما يلي :



1. سرعة وتسارع الحلقة A . 2. السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للذراع CD .

الحل : ....

سرعة وتسارع الحلقة A : بما أن الحلقة مثبتة تثبيتاً مفصلياً بالذراع AB ، إذن يمكن أن نكتب بعد ملاحظة أن السرعة الزاوية للذراع AB ثابتة ما يلي :

$$v_A = r\omega = AB \times \omega_1 = 0.4 \tan 30° \times 6 = 1.38\ m/s$$

$$a_A = (a_A)_n = r\omega^2 = AB \times \omega_1^2$$
$$= 0.23 \times 6^2 = 8.28\ m/s^2$$

يبين الشكل الاتجاه الفعلي لكل من سرعة وتسارع الحلقة .

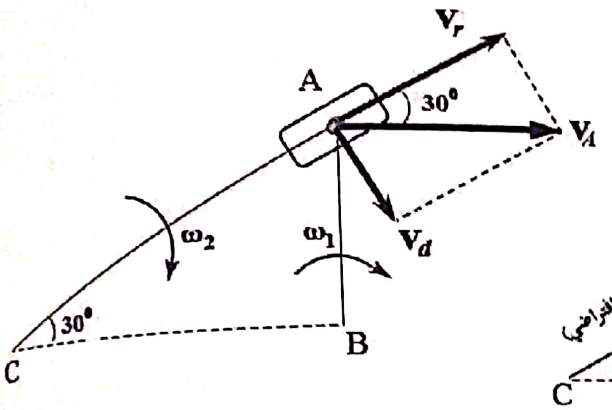
السرعة الزاويّة للذراع CD : نلاحظ أن حركة الحلقة A هي حركة مركبة ، لهذا يمكن تحليل سرعتها كما هو مبين في الشكل إلى سرعتين : الأولى نسبية على امتداد الذراع CD والثانية مكتسبة تنتقل بفعل دوران نفس الذراع بسرعة مقدارها ω_2 . أي أن :

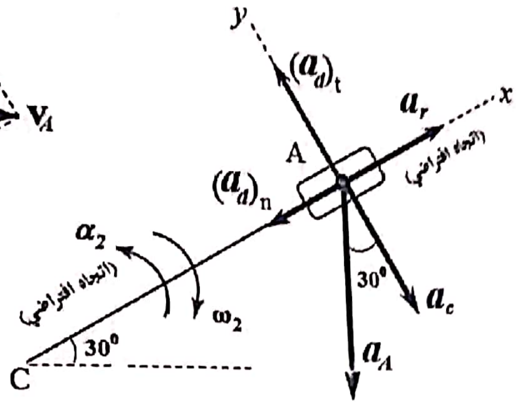
$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_r + \mathbf{V}_d$$

حيث :

$$v_r = v_A \cos 30° = 1.38 \times 0.866 = 1.2\ m/s$$
$$v_d = v_A \sin 30° = 1.38 \times 0.5 = 0.69\ m/s$$

$$\omega_2 = \frac{v_d}{AC} = \frac{0.69}{0.46} = 1.5\ rad/s$$





التسارع الزاويّ للذراع CD : لدينا :

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_d + \boldsymbol{a}_c$$

نرسم أشعة هذه التسارعات كما هو مبين في الشكل ، ثم نحسب القيم الآتية :

$$a_r = ?$$
$$(a_d)_t = r\alpha = 0.46 \times \alpha_2 = 0.46\alpha_2 \quad m/s^2$$
$$(a_d)_n = r\omega^2 = 0.46 \times (1.5)^2 = 1.04\ m/s^2$$
$$a_c = 2\omega_2 v_r = 2 \times 1.5 \times 1.2 = 3.6\ m/s^2$$

نقوم بإسقاط العلاقة الشعاعية للتسارعات على محور الإحداثيات y فنحصل بعد التعويض على التسارع الزاوي α_2 المطلوب وذلك كما يلي :

$$-a_A \cos 30° = (a_d)_t - a_{cor}$$
$$-8.28 \times \cos 30° = 0.46\alpha_2 - 3.6$$
$$\alpha_2 = -7.76\ rad/s^2$$

إشارة السالب تبين أن الاتجاه الفعلي للتسارع الزاوي هو مع اتجاه دوران عقارب الساعة .